

*Костецька Тетяна,
студентка V курсу, спеціальність «Математика та
інформатика».
Науковий керівник – **Корольок О. М.**,
кандидат педагогічних наук, доцент*

МАТЕМАТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ В БІОЛОГІЇ

Для того, щоб по-справжньому проникнути в процеси або явища досліджувані в біології, різні організми, їх взаємодії та розвиток, керувати такими явищами, необхідно відшукати відповідний математичний апарат, який міг би забезпечити більш точний і логічно строгий метод аналізу. Це і є головний аргумент, що зумовлює застосування математики у біології [3].

Для прикладу, розглянемо математичну модель у біології – нелінійне диференціальне рівняння Ходжкіна-Хакслі.

Матеріальна природа нервового імпульсу цікавила багатьох дослідників. Ще у XVIII столітті було виявлено електричну природу збуджень нервових і м'язових тканин [1]. Згідно з уявленнями, що склалися на початок XX століття на основі досліджень Б. Ф. Веріго, Ю. Бернштейна, Л. Германа, збуджена ділянка волокна стає генератором електричного струму. Цей струм, потрапляючи в сусідні ділянки, змушує їх у свою чергу генерувати струм, який переводить у збуджений стан нові ділянки і т. д.

У своїх теоретичних вишукуваннях А. Ходжкін і Д. Хакслі виходили з результатів експериментального вивчення гігантського аксона кальмара. Це нервеве волокно досягає товщини 0,5-1 мм (що у сотні разів перевищує товщину нервових волокон ссавців) і являє собою дуже зручний об'єкт для таких досліджень [2].

У моделі Ходжкіна-Хакслі член $I(V)$ рівняння:

$$\frac{a}{2R} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C \frac{\partial V}{\partial x} + I(V)$$

представляється як сума трьох доданків – калієвого струму (тобто струму, створюваного іонами калію), натрієвої струму і струму, створюваного іншими носіями зарядів (зокрема, іонами хлору), – і описується структура кожного з цих доданків.

Точніше, моделлю Ходжкіна-Хакслі називається наступна система нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{a}{2R} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C \frac{\partial V}{\partial x} + (V - E_k) \cdot \bar{g}_k n^4 + (V - E_{Na}) \bar{g}_{Na} m^3 h + (V - E_0) \bar{g}_0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= a_n(1 - n) - \beta_n n \\
\frac{dm}{dt} &= a_m(1 - m) - \beta_m m \\
\frac{dh}{dt} &= a_h(1 - h) - \beta_h h
\end{aligned}
\tag{1}$$

Тут n , m і h – функції потенціалу і часу, які визначають поведінку натрієвого і калієвого струмів, a – радіус волокна, R – питомий опір протоплазми, C – питома ємність мембрани, $E_k, E_{Na}, E_0, \bar{g}_k, \bar{g}_{Na}, \bar{g}_0$ – постійні, і, нарешті, a_n, a_m, a_h – задані функції потенціалу, мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{0,01(V+10)}{e^{\frac{V}{10}-1}}, \quad a_m = \frac{0,01(V+25)}{e^{\frac{V}{10}-1}}, \quad a_h = 0,007e^{\frac{V}{20}}, \quad \beta_n = 125e^{\frac{V}{20}}, \\
\beta_m &= 4e^{\frac{V}{18}}, \beta_h = \frac{1}{e^{\frac{V}{10}+1}} \quad [5].
\end{aligned}$$

Система рівнянь Ходжкіна-Хакслі не може бути розв'язана аналітично в явному вигляді. Її розв'язок, що відповідає певним початковим і кінцевим умовам, можна отримати за допомогою чисельних методів і комп'ютера. З іншого боку, деякі властивості процесу поширення імпульсу по нервовому волокну можна отримати з аналізу системи (1).

Одним із результатів аналізу моделі Ходжкіна-Хакслі є генерація імпульсів. Припустимо, що нервеве волокно, спочатку знаходиться в стані спокою, стимулюється протягом короткого часу зовнішнім джерелом струму. Як показує аналіз рівняння (1), при цьому перш за все почне збільшуватись величина $m(V, t)$, що приведе до збільшення $(V - E_{Na})\bar{g}_{Na}m^3h$ (натрійовий струм), а отже, і до збільшення різниці потенціалів між протоплазмою і зовнішнім середовищем (тобто посилення деполяризації волокна). При збільшенні деполяризації величина m зростає, а величина h зменшується, причому ці зміни m і h пов'язані так, що величина m^3h , що входить у вираз для натрієвого струму, спершу зростає, а потім починає зменшуватись [4].

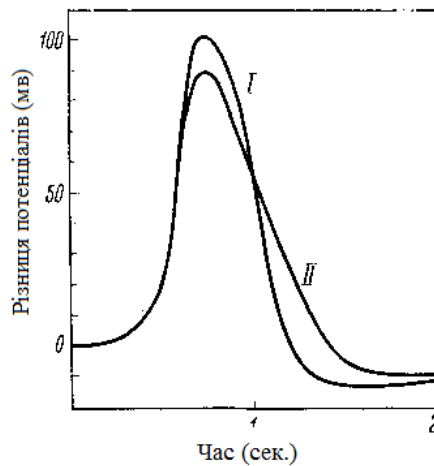


Рис. 1. Порівняння форми імпульсів, отриманих в реальних експериментах (I) і розрахованих за моделлю Ходжкіна-Хакслі (II).

Рівняння Ходжкіна-Хакслі можуть бути застосовані для дослідження процесів, що відбуваються в збуджених середовищах з різною геометрією (розгалужені волокна, волокна змінного діаметру і т. д.). Проте у цих випадках якісне дослідження складніше.

Таким чином, модель Ходжкіна-Хакслі щодо процесів поширення збудження значною мірою реалізує ті цілі, які переслідує математичне моделювання взагалі: на основі невеликої кількості вихідних постулатів кількісно описати і пояснити доволі широке коло явищ, які раніше сприймалися як не зв'язані між собою.

Література

1. Беркінблїт М. Б. Взаємодія нервових імпульсів в вузлі розгалуження (дослідження на моделі Ходжкіна-Хакслі) / Беркінблїт М. Б., Введенська Н. Д., Гнеденко Л. С., Ковальов С. А., Фомін С. В., Холопов А.В. // Біофізика. – 16 (1). – 1971. – С. 103–110.
2. Маркін В. С. Про поширення збудження в одній моделі нервового волокна / Маркін В. С., Чізмаджев Ю. А. // Біофізика. – 12 (5). – 1967. – С. 900–907.
3. Теоретична і математична біологія : зб. статей. – М, 1968.
4. Ходорів Б. І. Теоретичний аналіз механізмів проведення нервового імпульсу по неоднорідному волокну / Ходорів Б. І., Зімін Е. Н. // Біофізика. – 15 (3). – 1970. – С. 503–512.